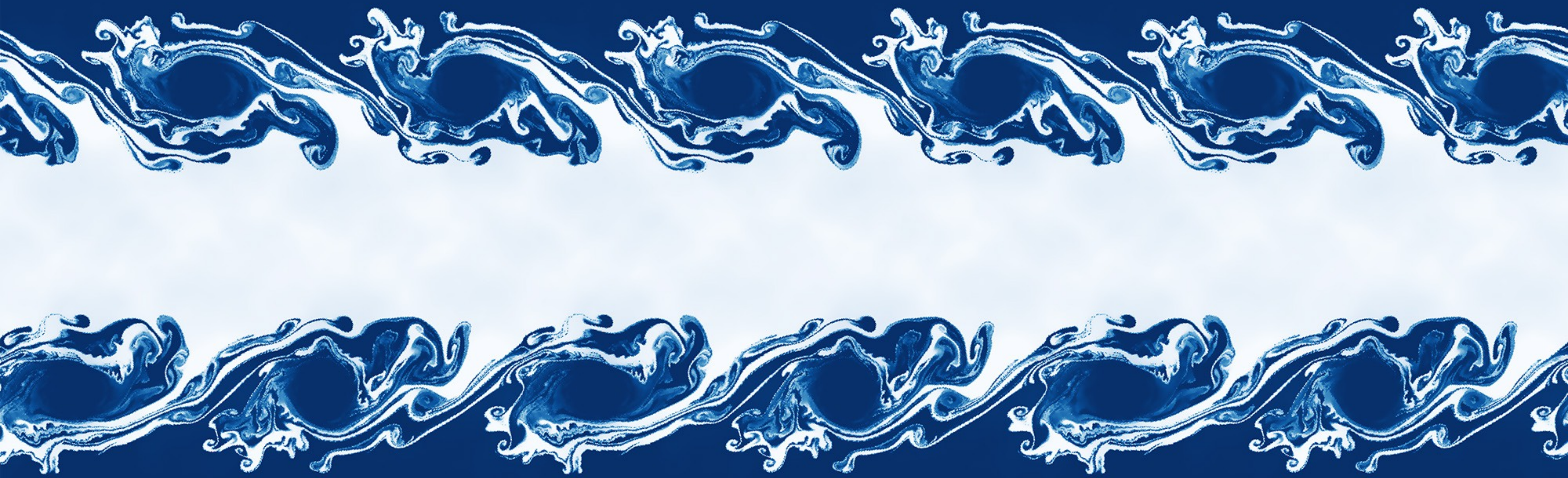
ASTR 670: Interstellar medium and gas dynamics

Prof. Benedikt Diemer



Chapter 2 • The Euler equations

Gradient of scalar field

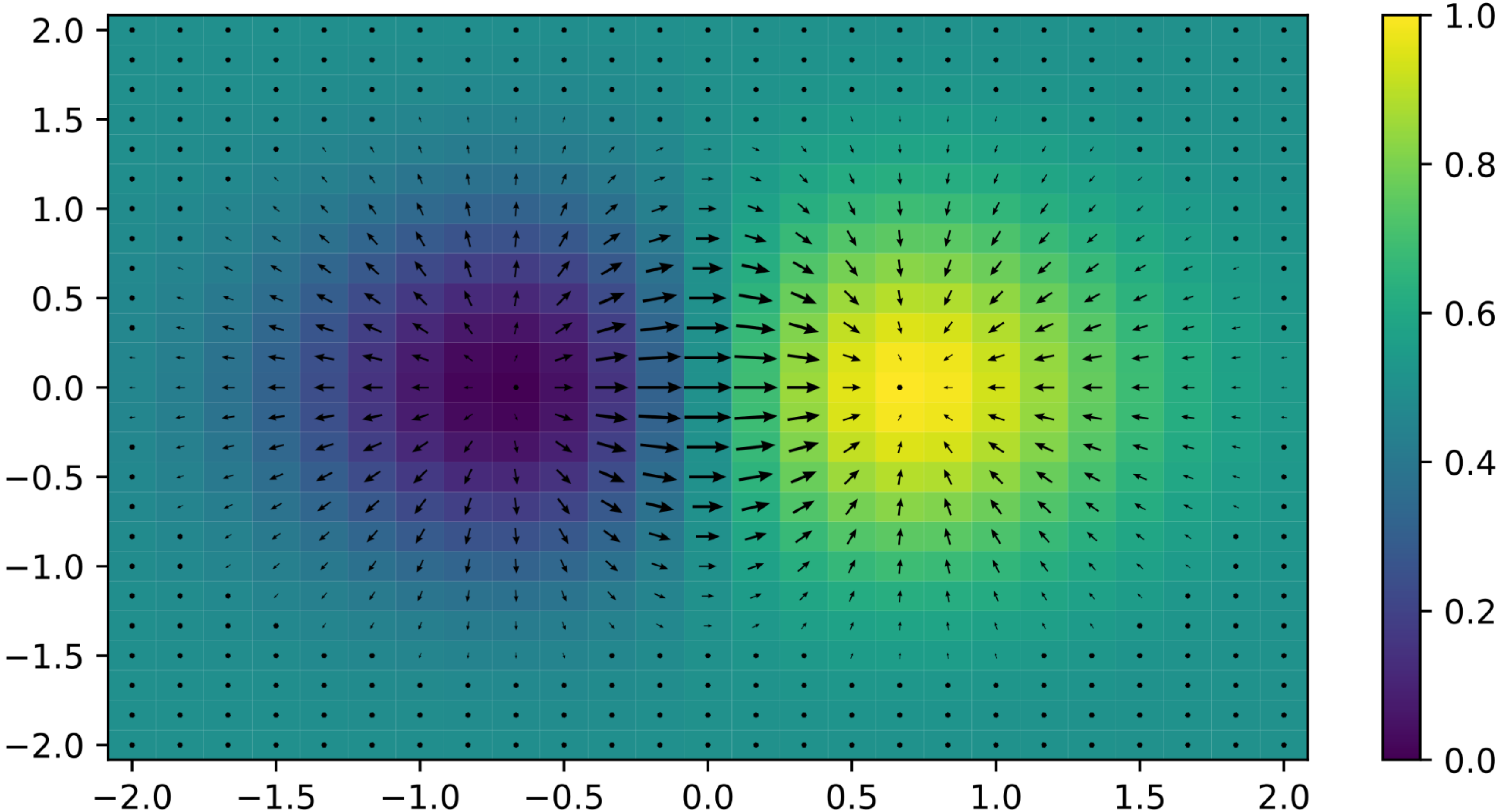


Image: Wikipedia

Divergence

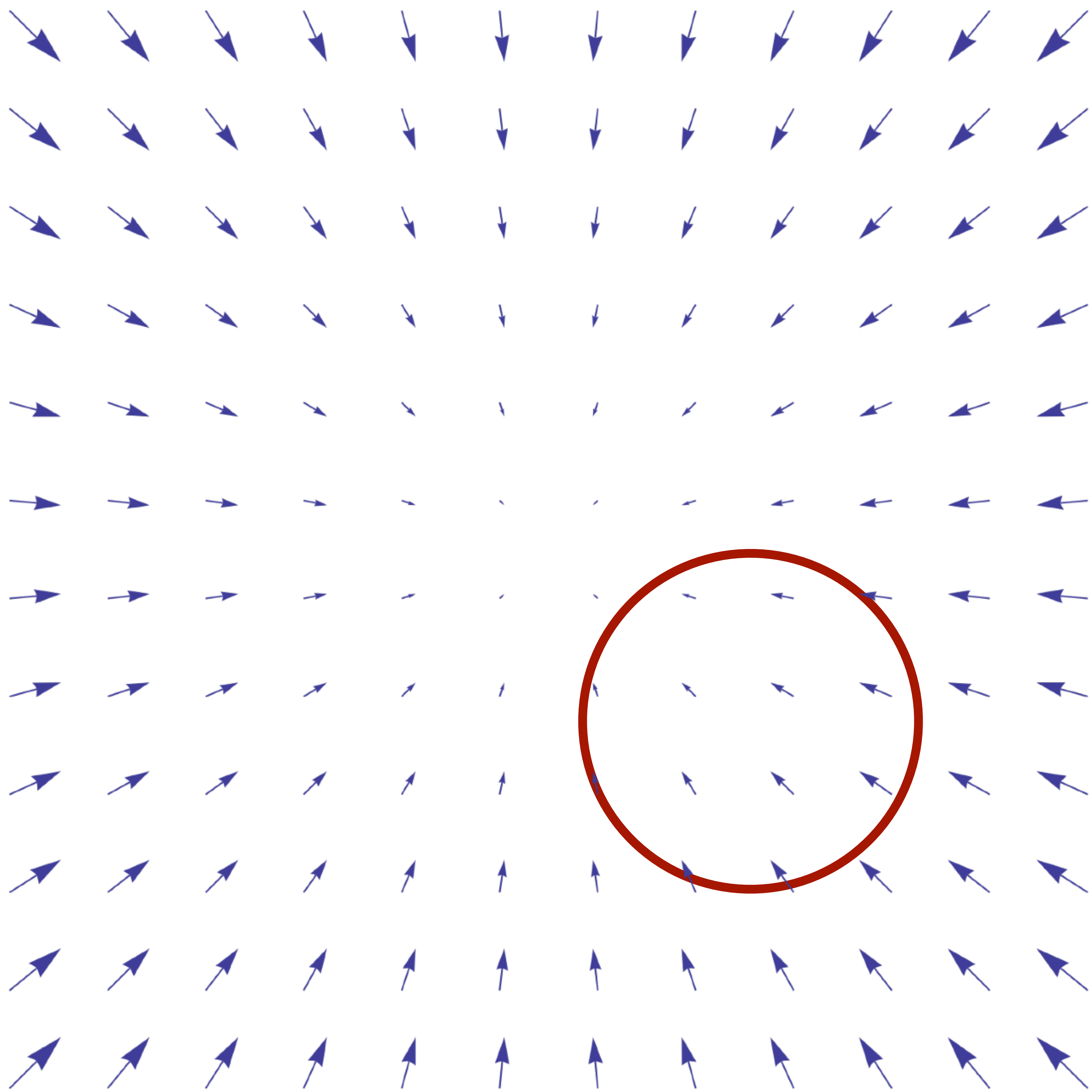


Image: Wikipedia

Divergence

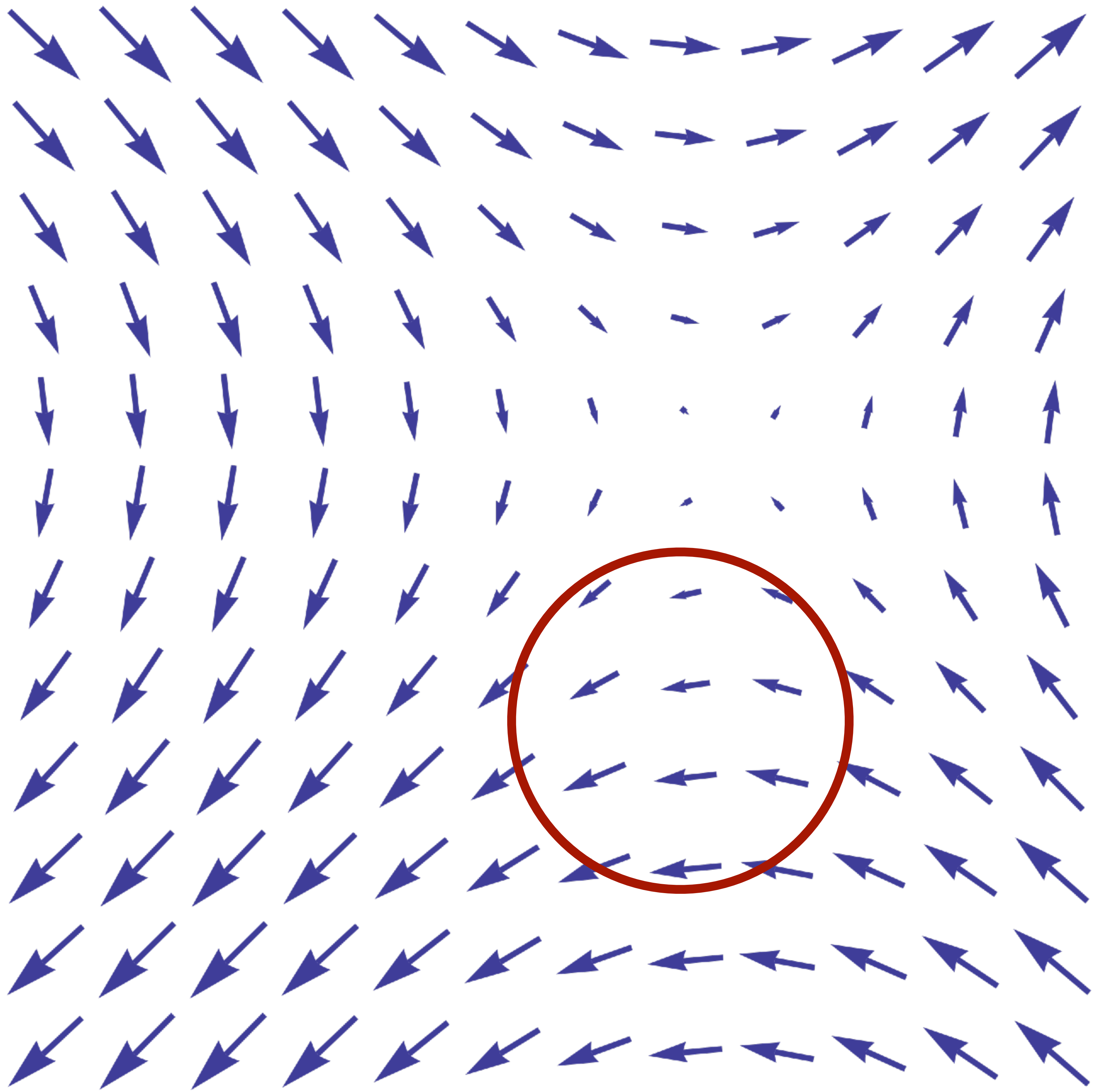


Image: Wikipedia

Curl

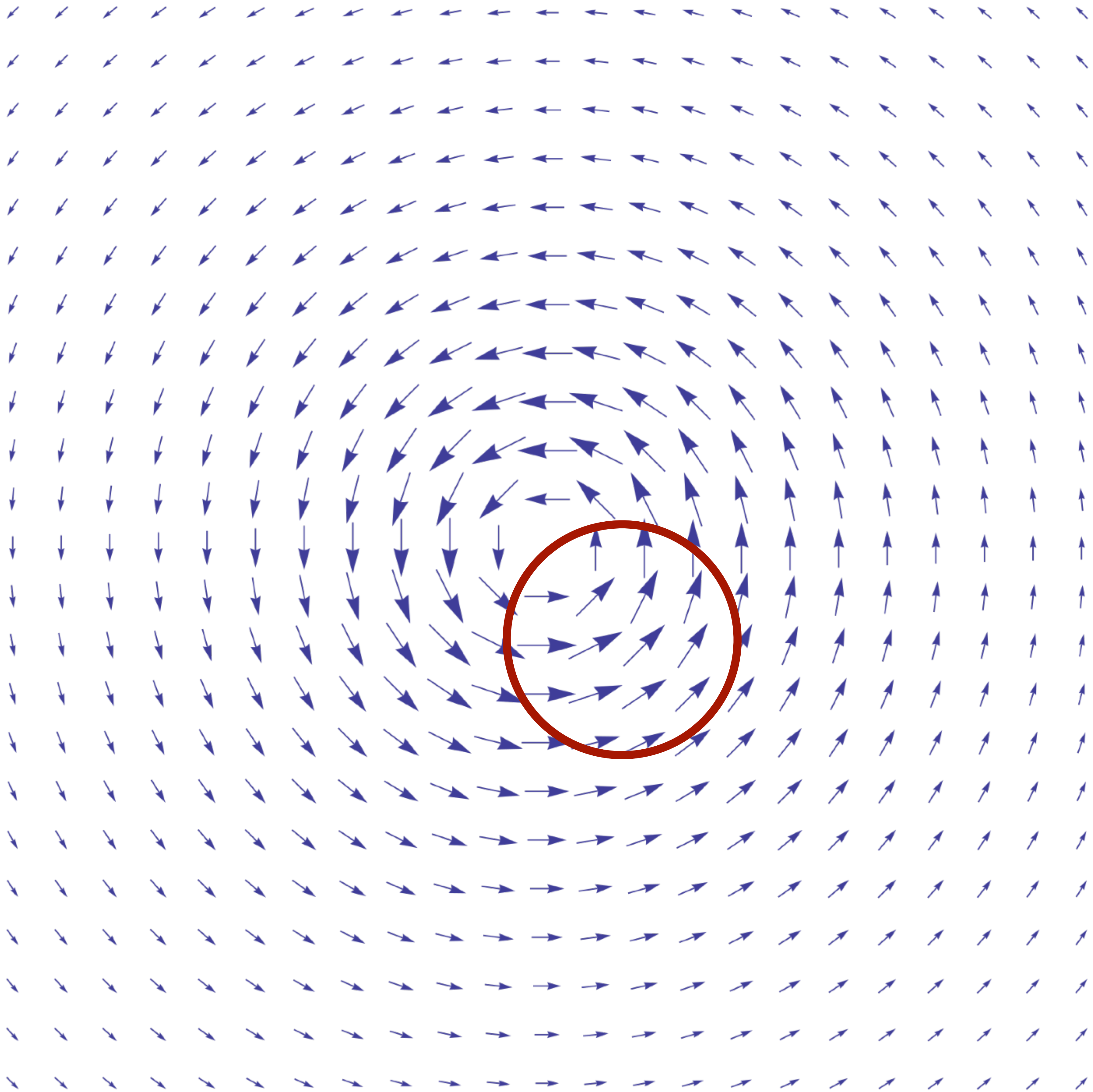


Image: Wikipedia

Laplacian

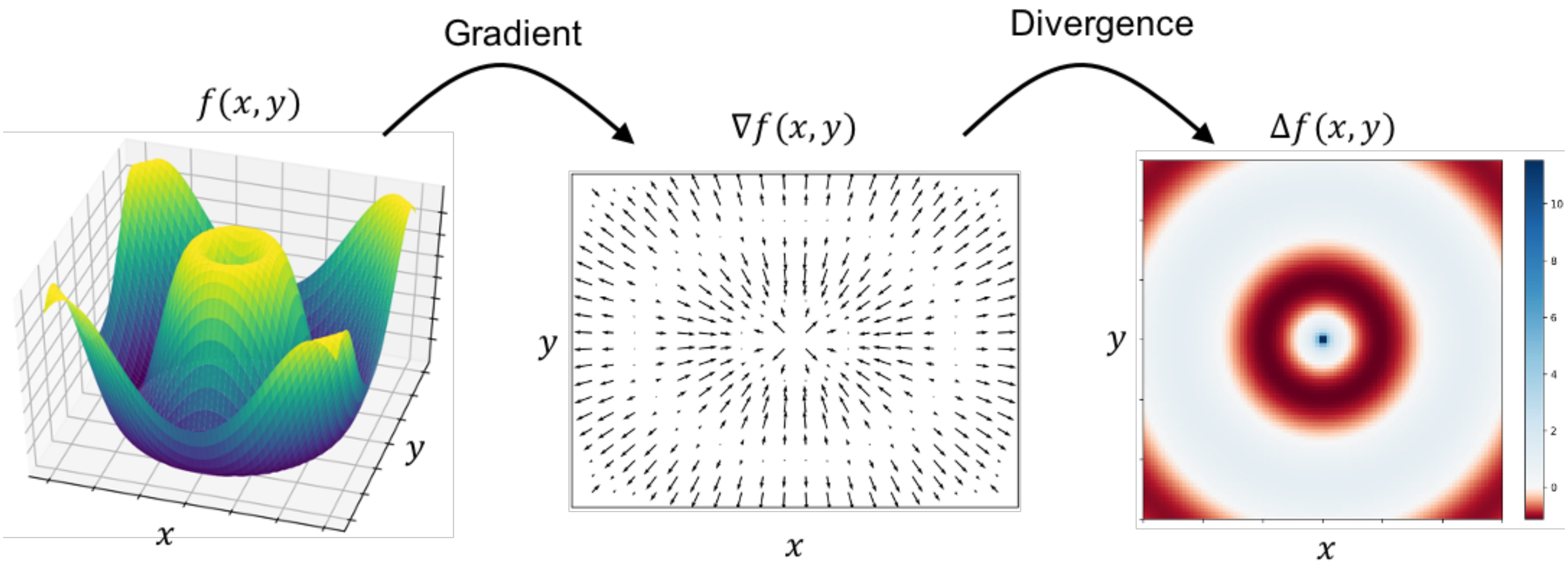
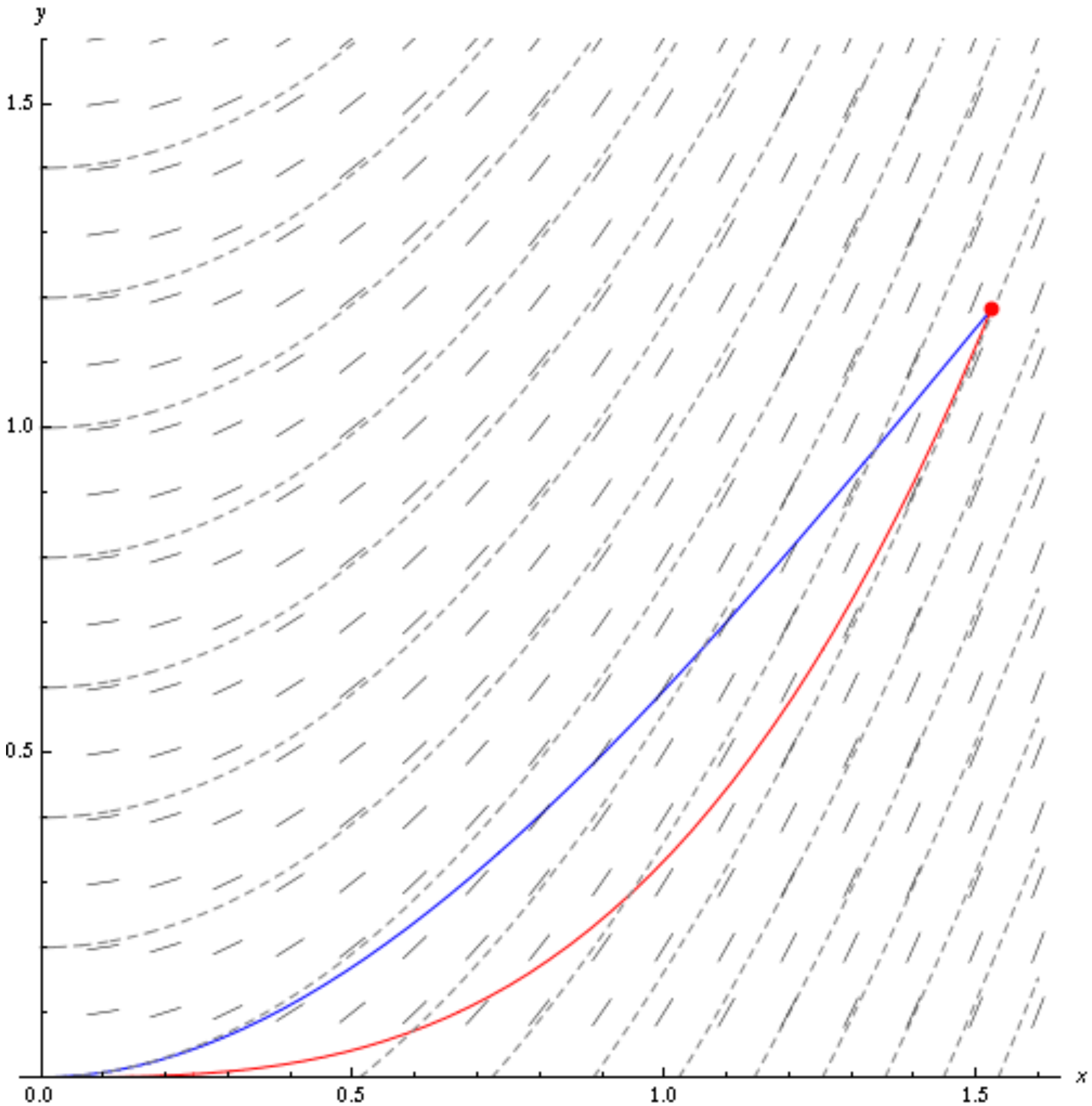


Image: Matthew Bernstein (link)

Pathlines, streamlines, streaklines



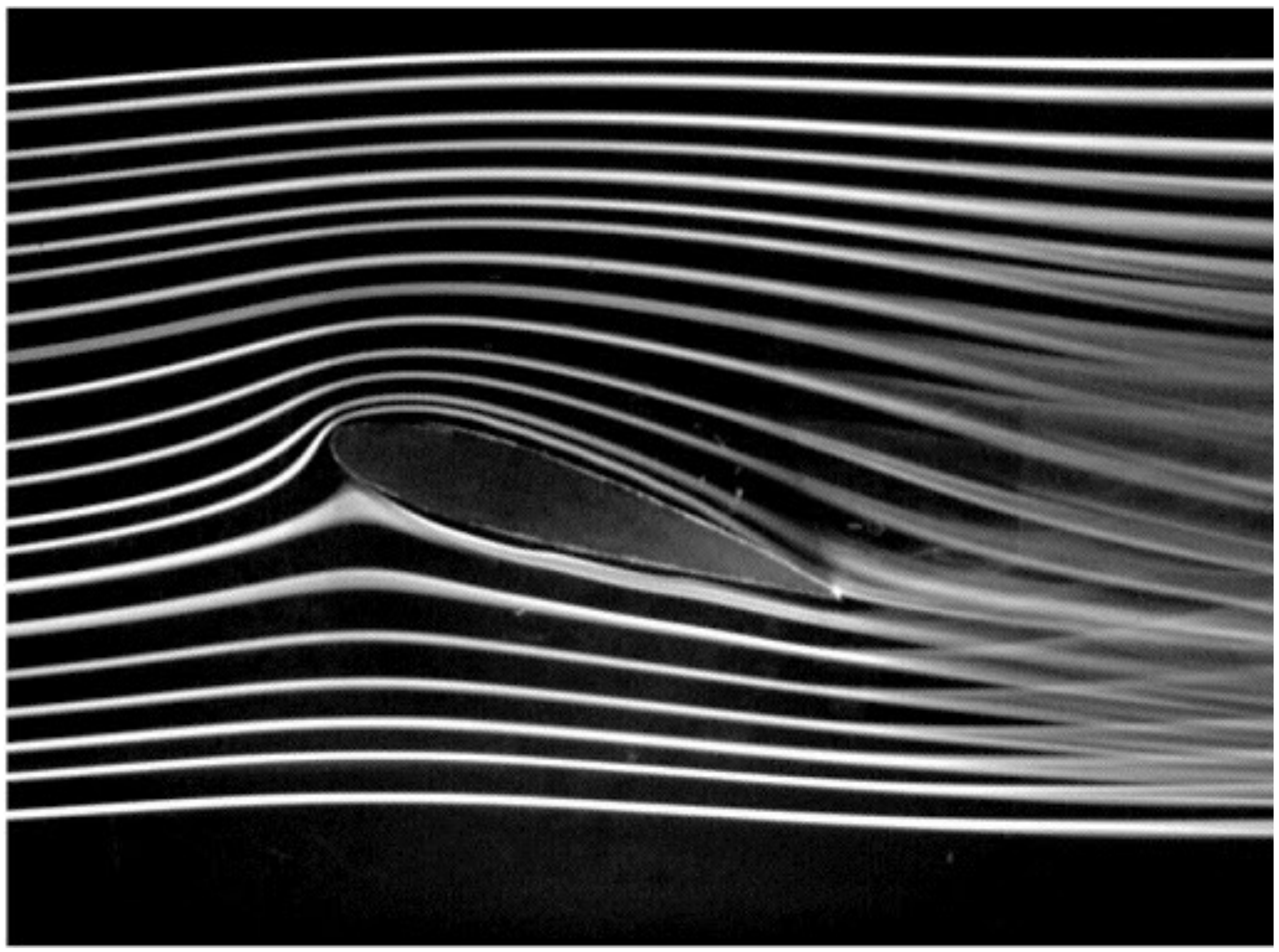
Pathline: track of fluid element

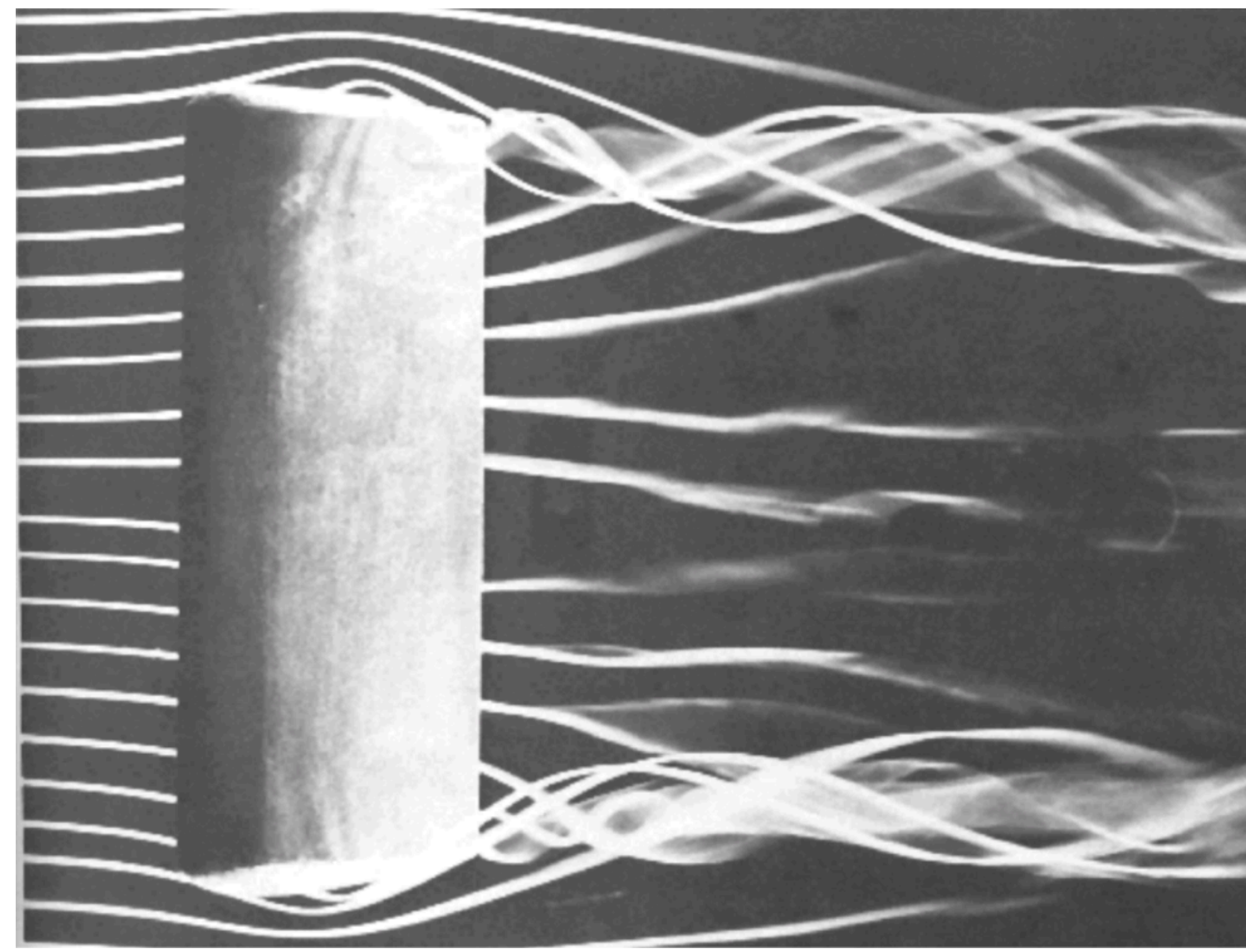
Streamline: tangent to fluid velocity (gray dashes)

Streakline: connects fluid elements that have gone through or will go through the current location. Equivalent to pathline but traveling with the fluid flow.

Image: Wikipedia

Pathlines, streamlines, streaklines





Images: van Dyke 1982

The Euler Equations

Changes at fixed position + Fluid motion along gradients = Changes experienced by fluid elem.

Density

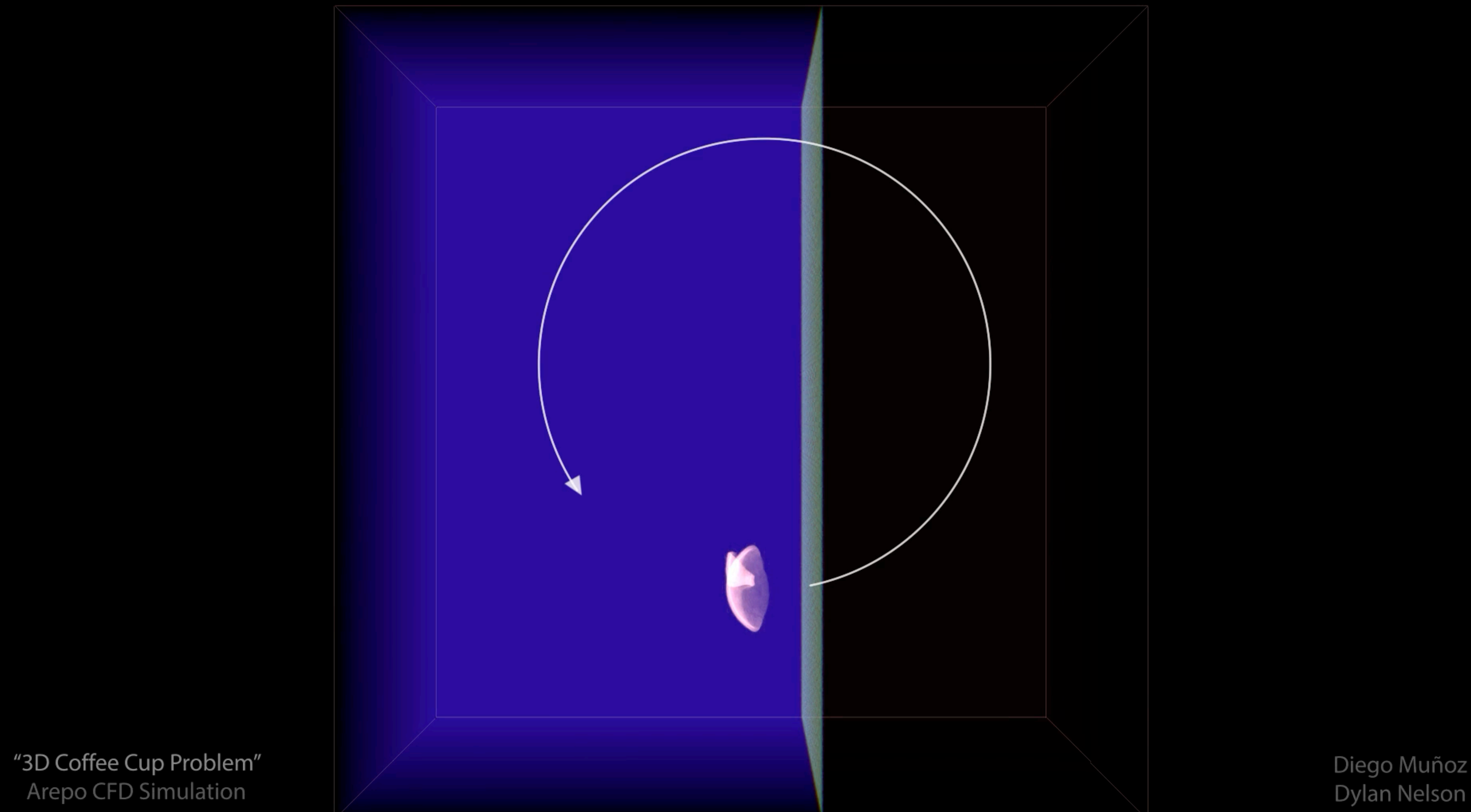
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho = \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} = \underbrace{-\rho \nabla \cdot \boldsymbol{u}}_{\text{Inflow of density into fluid element}}$$

Velocity

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t} = \underbrace{-\frac{\nabla P}{\rho}}_{\text{Pressure gradient}} \underbrace{- \nabla \Phi}_{\text{Gravitational force}}$$

Energy

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \varepsilon = \frac{\mathrm{D}\varepsilon}{\mathrm{D}t} = \underbrace{-\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{u}}_{\text{PdV work}} \underbrace{+ \frac{\Gamma}{\rho}}_{\text{Heating}} \underbrace{- \frac{\Lambda}{\rho}}_{\text{Cooling}}$$



Movie by Diego Munoz and Dylan Nelson (vimeo)

Leonhard Euler (1707 - 1783)

- Swiss mathematician who worked mostly in St. Petersburg and Berlin
- Wrote 866 papers, articles, important letters
- Too many achievements to list, but:
    - First to write functions as f(x)
    - Introduced e and ln
    - Introduced complex numbers
    - Invented analytic number theory, including sinh / cosh
    - Introduced the Gamma function
    - Introduced the beginnings of graph theory
    - Solved many problems using power series
    - Contributed to classical mechanics, optics, and fluid mechanics
- Three papers on fluid mechanics in 1757

List of things named after Leonhard Euler

From Wikipedia, the free encyclopedia
(Redirected from List of topics named after Leonhard Euler)


Leonhard Euler (1707–1783)

In mathematics and physics, many topics are named in honor of Swiss mathematician Leonhard Euler (1707–1783), who made many important discoveries and innovations. Many of these items named after Euler include their own unique function, equation, formula, identity, number (single or sequence), or other mathematical entity. Many of these entities have been given simple and ambiguous names such as **Euler's function**, **Euler's equation**, and **Euler's formula**.

Euler's work touched upon so many fields that he is often the earliest written reference on a given matter. In an effort to avoid naming everything after Euler, some discoveries and theorems are attributed to the first person to have proved them *after* Euler.[1][2]

Contents [hide]

Leonhard Euler (1707 - 1783)

PRINCIPES GÉNÉRAUX DU MOUVEMENT DES FLUIDES.

PAR M. EULER.

I.

Ayant établi dans mon Mémoire précedent les principes de l'équilibre des fluides le plus généralement, tant à l'égard de la diverſe qualité des fluides, que des forces qui y puiſſent agir; je me propoſe de traiter ſur le même pied lè mouvement des fluides, & de rechercher les principes géneraux, ſur lesquels toute la ſcience du mouvement des fluides eſt fondée. On comprend aiſément que cette matiere eſt beaucoup plus difficile, & qu'elle renferme des recherches incomparablement plus profondes : cependant j'eſpère d'en venir auſſi heureuſement à bout, de ſorte que s'il y reſte des difficultés, ce ne ſera pas du côté du méchanique, mais uniquement du côté de l'analytique: cette ſcience n'étant pas encore portée à ce degré de perfection, qui ſeroit néceſſaire pour développer les formules analytiques, qui renferment les principes du mouvement des fluides.

II. Il s'agit donc de découvrir les principes, par lesquels on puiſſe déterminer le mouvement d'un fluide, en quelque état qu'il ſe trouve, & par quelques forces qu'il ſoit ſollicité. Pour cet effet examinons en détail tous les articles, qui conſtituent le ſujet de nos recherches, & qui renferment les quantités tant connues qu'inconnues. Et d'abord la nature du fluide eſt ſuppoſée connue, dont il faut conſidérer les diverſes eſpeces : le fluide eſt donc, ou incompreſſible, ou compreſſible. S'il n'eſt pas ſuſceptible de compreſſion, il faut diſtinguer deux cas, l'un où toute la maſſe eſt compoſée de parties homogenes, dont la denſité eſt partout & demeure toujours la même, l'au-

tre

XIX. Pour trouver les accélérations que l'élément du fluide en Z ſubit, nous n'avons qu'à comparer les viteſſes u, v, w, qui répondent à préſent au point Z; avec celles qui répondent après le tems dt au point Z'. Il arrive donc un double changement, & à l'égard des coordonnées x, y, z, qui reçoivent les incrémens udt, vdt, wdt, & à celui du tems qui augmente de dt. D'où les trois viteſſes qui conviennent au point Z' ſont :

$$\text{ſelon la direction } OA = u + dt\left(\frac{du}{dt}\right) + udt\left(\frac{du}{dx}\right) + vdt\left(\frac{du}{dy}\right) + wdt\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$\text{ſelon la direction } OB = v + dt\left(\frac{dv}{dt}\right) + udt\left(\frac{dv}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dv}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$\text{ſelon la direction } OC = w + dt\left(\frac{dw}{dt}\right) + udt\left(\frac{dw}{dx}\right) + vdt\left(\frac{dw}{dy}\right) + wdt\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

Et partant les accélérations, étant exprimées par les incrémens des viteſſes diviſés par l'élément du tems dt, ſeront :

$$\text{ſelon la direction } OA = \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right)$$

$$\text{ſelon la direction } OB = \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

$$\text{ſelon la direction } OC = \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right)$$

XX. Cherchons maintenant les forces accélératrices ſelon ces mêmes directions, qui réſultent des preſſions du fluide ſur le parallelepipede Zz, dont le volume eſt $= dxdydz$, & partant la maſſe du fluide qui l'occupe $= q\,dxdydz$. Or la preſſion au point Z étant exprimée par la hauteur p, la force motrice, qu'en reçoit la face $ZQRp$ eſt $= pdydz$; & pour la face oppoſée $zqrP = dydz$, la hauteur p eſt augmentée de ſon différentiel $dx\left(\frac{dp}{dx}\right)$, qui réſulte

en

Reading

- Recommended: CC §1.3-5, §2.1-3, §4.1, §4.3
- Additional: Shu §3, §4